Forme algébrique

Ex 1 : ***Vrai ou faux***

1) Si $z=4i-3$, alors

a) Im(z)=-3	d) $-\bar{z}=4i+3$
b) Im(z)=4	e) $i\bar{z}=4-3i$
c) $\bar{z}=4i+3$	f) Re($\bar{z}$)=-3

2) Si $z=-3i$, alors z est un imaginaire pur.

3) Si $z=-2$, alors iz est un imaginaire pur.

4) Si $z=a+ib$ (où $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}$) , alors

a) Re($z+3$)=Re(z)+3	c) Im(z^2)= b^2
b) Re(iz)= b	d) Im($2z$)= $2b$

Ex 2 : ***Forme algébrique – conjugué – parties réelles et imaginaires***

Les exercices ci-dessous sont indépendants :

1) Déterminer les parties réelles et imaginaires de :

$3i$; -5 ; 0 ; i^3 ; $3i-2$

2) Soit $x\in\mathbb{R}$ et $z=(4-2x)+i(5-x)$.
a) Pour quelle valeur de x , z est-il réel ?
b) Pour quelle valeur de x , z est-il imaginaire pur ?

3) Déterminer la forme algébrique des nombres :
$z_1=3+5-i+2(8-5i)$ et $z_2=3(-2+5i)(3i-1)$

4) Déterminer les conjugués des nombres :
$z_3=5-4(i-3)$ et $z_4=3i(2-i)$

5) Déterminer la forme algébrique des inverses des nombres :
-3 ; i ; $-5i$; $1-2i$

6) Écrire sous forme algébrique les nombres :
$\frac{3}{i}$; $\frac{2}{2i-1}$; $\frac{2-i}{2+3i}$

Ex 3 : ***Réels et imaginaires purs***

Soit $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$.
Pour quelles valeurs de x et y les nombres ci-dessous sont réels ou imaginaires purs ?

$z_1=2x-4i+7$ et $z_2=3x-2i+4(x+iy)$

Ex 4 : ***Mettre sous forme algébrique - calculatrice***

Mettre les nombres complexes ci-dessous sous forme algébrique, puis vérifier avec la calculatrice :

1) $z_1=(4-5i)^2$	6) $z_6=i^4-i^3$
2) $z_2=(4-5i)(4+5i)$	7) $z_7=\overline{(1-2i)^2}$
3) $z_3=(4+5i)^2$	8) $z_8=\overline{1-i(2-5i)}$
4) $z_4=2-i(3-4i)(1+i)$	9) $z_9=\frac{1}{4i-3}$
5) $z_5=(1-2i)^3$	10) $z_{10}=\frac{1}{(5-i)(2-3i)}$

Ex 5 : ***Une fonction dans les complexes***

Soit f la fonction définie de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ par $f(z)=z^2-3iz$.
1) Déterminer sous forme algébrique :
a) $f(i)$ b) $f(1-i)$ c) $f\left(\frac{1}{1+i}\right)$
2) Exprimer $\overline{f(z)}$ en fonction de f ($\bar{z}$)

Ex 6 : ***En fonction de*** $\bar{z}$

Écrire en fonction de $\bar{z}$ les conjugués des nombres suivants :

1) $Z_1=z-3i$	3) $Z_3=(z-2i)(iz+4)$
2) $Z_2=iz-4$	4) $Z_4=\frac{z-2+i}{z-3-i}$

Ex 7 : $z+\bar{z}$ ***et*** $z-\bar{z}$

Soit $z=\frac{3-2i}{5-i}$ et $z'=\frac{3+2i}{5+i}$
1) Sans calcul, justifier que $z+z'$ est un réel ?
2) Calculer $z-z'$.

Ex 8 : $z\bar{z}$

Dans chacun des cas, calculer $z\bar{z}$:

1) $z=1+3i$ 2) $z=\frac{1-2i}{2i+1}$

Ex 9 : ***Parties réelles et imaginaires en fonction de*** a ***et*** b

Soit $z=a+ib$ (où $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}$).

Déterminer en fonction de a et b les parties réelles et imaginaires de :

1) $Z_1=z^2-2z$ 2) $Z_2=\frac{z-i}{z+1}$ 3) $Z_3=\frac{z-2+i}{z+1-i}$

Affixes de points et de vecteurs

On se place dans un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

Ex 10 : ***Calculs d'affixes***

1) Déterminer les affixes des points suivants :
$A(2;0)$, $B(0;-5)$ et $C(-2;3)$

2) Déterminer les affixes des vecteurs suivants :
$-3\vec{u}$; $5\vec{u}$; $3\vec{u}-5\vec{v}$
3) Déterminer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$:
$A(2;5)$, $B(1;3)$, $C(3;0)$ et $D(-3;2)$

Ex 11 : ***Vecteurs colinéaires***

1) Soit $\vec{t}$ d'affixe $3-i$, $\mathrm{A}(3,-1)$ et $\mathrm{B}(x,3)$.

Pour quelle valeur de x , $\vec{t}$ est-il colinéaire à $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$?

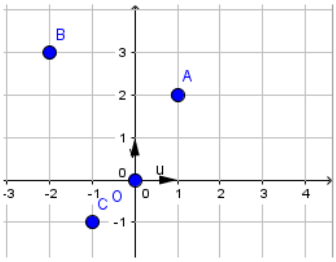
2) Soit $\mathrm{A}(3;4)$, $\mathrm{B}(1,2)$, $\mathrm{C}(a;0)$ et $\mathrm{D}(4;-b)$.
Pour quelles valeurs de a et b , ABCD est-il un parallélogramme ?

Ex 12 : ***Lire et calculer des affixes***

1) Lire les affixes des points A, B et C.

2) Lire les affixes des vecteurs :
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$

3) Déterminer les affixes des milieux des côtés su triangle ABC.



Ex 13 : ***Affixe et parallélogramme***

Soit A, B et C les points d'affixes $z_{\mathrm{A}}=5-i$, $z_{\mathrm{B}}=4-3i$ et $z_{\mathrm{C}}=-2+2i$.
1) Déterminer l'affixe du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.
2) Déterminer l'affixe de D tel que ABCD soit un parallélogramme.
3) Vérifier que ses diagonales ont le même milieu.

Ex 14 : ***Affixes de vecteurs et droites***

Soit A, B, C et D les points d'affixes $z_{\mathrm{A}}=4+i$, $z_{\mathrm{B}}=3-2i$, $z_{\mathrm{C}}=1+3i$ et $z_{\mathrm{D}}=-1+9i$.
Déterminer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{DC}}$.
Que peut-on dire des droites (AB) et (CD) ?

Ex 15 : ***Affixes, centre de gravité et points alignés***

Soit A, B et C les points d'affixes $z_{\mathrm{A}}=3+2i$, $z_{\mathrm{B}}=4-3i$ et $z_{\mathrm{C}}=-2+2i$.
1) Déterminer l'affixe du centre de gravité G de ABC.
(Le centre de gravité G vérifie $\overrightarrow{\mathrm{GA}}+\overrightarrow{\mathrm{GB}}+\overrightarrow{\mathrm{GC}}=\vec{0}$)
2) Déterminer l'affixe du milieu I de [BC] et montrer que les points A,I et G sont alignés.

Ex 16 : ***Affixes et centre de gravité***

Soit A, B, C et D les points d'affixes $z_{\mathrm{A}}=3i$, $z_{\mathrm{B}}=4+i$, $z_{\mathrm{C}}=2-3i$ et $z_{\mathrm{D}}=-2-i$.
1) Déterminer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{DC}}$. Que peut-on en déduire ?
2) Soit G tel que $2\overrightarrow{\mathrm{GA}}-\overrightarrow{\mathrm{GB}}+2\overrightarrow{\mathrm{GC}}=\vec{0}$. Déterminer l'affixe de G.
3) Montrer que G est le centre de gravité de ACD.

Ex 17 : ***Ensembles de points***

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O};\vec{u},\vec{v})$, déterminer dans chacun des cas l'ensemble des points M d'affixe $z=x+iy$

1) $3z+5i\bar{z}=7-2i$

2) $(1-2i)z+(1+2i)\bar{z}=z\bar{z}$

3) $z^2+\bar{z}\in\mathbb{R}$

4) $(1+z)(i+\bar{z})\in i\mathbb{R}$

5) $\dfrac{z+1-2i}{z-3+2i}\in\mathbb{R}$

6) $\dfrac{z+1-2i}{z-3+2i}\in i\mathbb{R}$

Forme trigonométrique - module et arguments

Ex 18 :

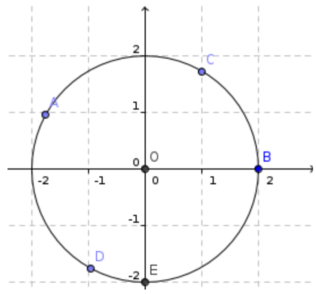
1) Soit z un nombre complexe de module r et d'argument θ .
Déterminer $|-z|$, $|iz|$, $\arg(-z)$ et $\arg(iz)$

2) Déterminer les longueurs AB et CD avec $z_{\mathrm{A}}=2+3i$, $z_{\mathrm{B}}=1+4i$, $z_{\mathrm{C}}=3i$ et $z_{\mathrm{D}}=5-2i$.

3) Déterminer le module et un argument des nombres :
-2 ; 5 ; $3i$; $-2i$; $-1-i$; $\sqrt{3}+i$; $\sqrt{3}-3i$

Ex 19 : ***Lecture graphique***

Lire le module et un argument des affixes des points de la figure :



Ex 20 : ***Représenter graphiquement***

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O};\vec{u},\vec{v})$, représenter les points M d'affixe z tels que :

1) $\arg(z)=\dfrac{\pi}{3}$ 2) $\arg(z)=\dfrac{-2\pi}{3}$ 3) $\begin{cases}\arg(z)=\dfrac{\pi}{4}\\ |z|=3\end{cases}$

Ex 21 : ***S'aider de la représentation graphique***

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O};\vec{u},\vec{v})$, représenter, puis déterminer le module et un argument des nombres :
$z_1=-1+i$, $z_2=-1-i$, $z_3=-4$, $z_4=3i$

Ex 22 :

Soit $z=\cos\left(\dfrac{7\pi}{8}\right)+i\sin\left(\dfrac{7\pi}{8}\right)$.

1) Donner le module et un argument de z .

2) En déduire le module et un argument de :

$z_1=2z$, $z_2=iz$, $z_3=-3z$, $z_4=-3iz$, $z_5=\bar{z}$

La notation exponentielle

Ex 23 : ***Mettre sous forme exponentielle***

Mettre sous forme exponentielle les nombres complexes :

$z_1=-\sqrt{3}+i$, $z_2=-2-2i$, $z_3=-\dfrac{1}{2}(\sqrt{3}+i)$, $z_4=3-i\sqrt{3}$, $z_5=4+4i$

En déduire les formes exponentielles de z_1z_2 , de $z_3z_4z_5$ et de $\dfrac{z_2}{z_3}$.

Ex 24 : ***Mettre sous forme algébrique***

Mettre sous forme algébrique les nombres complexes :

$z_1=4e^{\frac{i\pi}{2}}$, $z_2=e^{i\pi}$, $z_3=2e^{i\frac{3\pi}{4}}$

Ex 25 : ***Mettre sous forme exponentielle***

Les questions sont indépendantes.

1) On pose $z=3-i\sqrt{3}$

a) Déterminer l'écriture exponentielle de z .

b) En déduire les écritures exponentielles de :
$z_1=3z$, $z_2=iz$, $z_3=-2z$, $z_4=-4iz$

2) Soit $z=re^{i\theta}$ (où $r>0$).
Déterminer l'écriture exponentielle de $-z$, iz , $-iz$, $\bar{z}$ et $-i\bar{z}$.

3) Soit $a\in\mathbb{R}$. Déterminer l'écriture exponentielle des nombres suivants :

$\cos a-i\sin a$, $\sin a+i\cos a$ et $-\sin a+i\cos a$

Ex 26 : ***Valeur exacte de*** $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ ***et de*** $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

Soit $z_1=\dfrac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ et $z_2=1+i$.

1) Déterminer les formes exponentielles de z_1 et de z_2 .

2) En déduire celle de $Z=z_1z_2$

3) Déterminer la forme algébrique de Z.

4) En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et de $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

Ex 27 : ***Simplification d'écriture***

Simplifier l'écriture du nombre suivant :
$b=\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)^2-\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)^2$

Ex 28 : ***Retrouver des formules de trigonométrie***

En utilisant la forme exponentielle, exprimer les expressions suivantes en fonction de $\cos x$ et de $\sin x$.

$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)$, $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$, $\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{2}\right)$

Ex 29 : ***Un calcul pas si compliqué ...***

Déterminer le module et un argument de $\left(\dfrac{3+i\sqrt{3}}{2-2i}\right)^4$.

Nombres complexes et géométrie

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

Ex 30 : ***Ensembles de points***

Dans chacun des cas, déterminer géométriquement l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie :

1) $|z-3-2i|=5$ 2) $|z-2-i|=|z+5-i|$ 3) $|z+i|=|z-1|$

Ex 31 : ***Ensemble de points , arguments et angles orientés de vecteurs***

Pour cet exercice on utilisera la propriété suivante :

> Si $\vec{t}_1$ et $\vec{t}_2$ sont deux vecteurs d'affixes z_1 et z_2 non nulles, alors
> $(\vec{t}_1,\vec{t}_2)=\arg\left(\dfrac{z_2}{z_1}\right)\ [2\pi]$

Soit A,B,C et D les points d'affixes $z_A=1$, $z_B=i$, $z_C=-1$ et $z_D=-i$.

1) Déterminer l'ensemble des points d'affixe z tel que $\dfrac{z+i}{z+1}$ soit un imaginaire pur.

2) Déterminer l'ensemble des points d'affixe z tel que
$\arg(z-i)=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ (où $k\in\mathbb{Z}$)

Ex 32 : ***Vecteurs orthogonaux, points alignés,*** Re($z'\bar{z}$) et Im($z'\bar{z}$)

Soit M et M′ d'affixes $z=x+iy$ et $z'=x'+iy'$ où x , y , x' et y' sont des nombres réels. Montrer que :

1) $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ sont orthogonaux si, et seulement si , Re($z'\bar{z}$)=0

2) O , M et M′ sont alignés si, et seulement si Im($z'\bar{z}$)=0

Fonctions dans les complexes

Ex 33 :

Soit I le point d'affixe $2i$ et f la fonction qui à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' tel que $z'=iz$.

1) a) Déterminer l'affixe du point A′ , l'image par f du point A d'affixe $1+\sqrt{2}+i$.
b) Montrer que A, I et A′ sont alignés.

2) a) Montrer que les points M du plan tels que M, I et M′ soient alignés sont sur le cercle Γ de centre Ω d'affixe $1+i$ et de rayon $\sqrt{2}$.
b) Montrer que $A\in\Gamma$.
c) Déterminer l'ensemble Γ' décrit par le point M′ lorsque le point M décrit Γ .

3) Soit B le point d'affixe $2+2i$ et B′ son image par f .
a) Montrer que $(AB)\perp(A'B')$
b) Soit C le point d'intersection des droites (AB) et $(A'B')$.
Déterminer la nature du quadrilatère OACA′ .

Ex 34 :

Soit les points A et B d'affixes respectives 2 et -2 et f la fonction qui à tout point M (différent de A) d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' tel que $z'=\frac{\bar{z}(z-2)}{\bar{z}-2}$.

1) a) Déterminer l'affixe du point P' image par f du point P d'affixe $1+i$.

b) Montrer que (AP) // (BP') .
c) Montrer que $(AP)\perp(PP')$.
2) Déterminer l'ensemble des points invariants par f .

On cherche maintenant à généraliser les propriétés 1b) et 1c) pour obtenir une construction de l'image M' d'un point M quelconque du plan.

3) a) Montrer que pour tout nombre complexe z , (z -2)($\bar{z}$ -2) ∈ ℝ .

b) En déduire que pour tout nombre complexe distinct de 2, $\frac{z'+2}{z-2}\in\mathbb{R}$.

c) Montrer que (AM) // (BM') .
4) Soit M un point quelconque tel que $M\notin(AB)$. Généraliser le résultat de la question 1c)
5) Soit M un point distinct de A. déduire des questions précédentes une construction du point M' image de M par f .
Réaliser une figure pour le point Q d'affixe $3-2i$.

Ex 35 :

Soit $a\in\mathbb{R}$, $b\in i\mathbb{R}$ et P le polynôme complexe défini par $P(z)=az^3+b$.

1) Montrer que si z_0 est une racine de P , alors $-\overline{z_0}$ est aussi une racine de P.

Dans la suite du problème, on pose $a=1$ et $b=i$, donc $P(z)=z^3+i$.
Soit f la fonction qui à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' tel que $z'=P(z)$.

2) a) Soit A l'image de O par f . Déterminer z_A , l'affixe de A.
b) Quelle est alors l'image du point A par f ?

3) Soit B le point d'affixe $z_B=e^{-i\frac{\pi}{6}}$.
a) Calculer $P(z_B)$.
b) En déduire, les trois points dont l'image par f est 0.

Équations

Ex 36 : ***Équations du premier degré et équ. de second degré élémentaires***

Résoudre dans ℂ les équations ci-dessous :

1) $(2+4i)z+3-i=5z-i$
2) $(2-i)z+3-i=3\bar{z}-i$
3) $\frac{i}{z+2i}=4$
4) $z^2=-9$
5) $(z-2i)^2=-4$
6) $z^2-\bar{z}=2$
7) $\frac{z-1}{iz+1}=-i$
8) $\frac{z-3+i}{z+2-i}=-2i$

Ex 37 : ***Équations du second degré***

Résoudre dans ℂ les équations ci-dessous .

1) $z^2-2z+2=0$
2) $2z^2-2z+3=0$
3) $2z^2-2z-3=0$
4) $z+\frac{1}{z}=1$
5) $z+\frac{1}{z}=\sqrt{3}$
6) $\frac{z-1}{z+2}=z$

Ex 38 : ***Système d'équation***

Résoudre dans ℂ le système d'équations $\begin{cases}3z_1+z_2=2-5i\\ z_1-z_2=2+i\end{cases}$.

Ex 39 : ***Équation de degré 3***

Soit $f(z)=z^3-(2+3i)z^2+2(1+3i)z-6i$.
1) Montrer que $f(z)=(z-3i)(z^2-2z+2)$
2) résoudre dans ℂ l'équation $f(z)=0$

Ex 40 : ***Équation de degré 4***

Résoudre dans ℂ l'équation $z^4+5z^2+6=0$.

Ex 41 : ***Utiliser les parties réelles et imaginaires***

Soit $z=x+iy$ (où $x\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}$).
Après avoir déterminé les parties réelles et imaginaires de $3z^2+z\bar{z}+6i\sqrt{2}$, résoudre dans ℂ l'équation $3z^2+z\bar{z}+6i\sqrt{2}=0$

Ex 42 : ***Solution évidente et identification***

Soit $P(z)=z^3-(16-i)z^2+(89-16i)z+89i$.
1) Calculer $P(-i)$.
2) Trouver deux nombres réels a et b tels que $P(z)=(z+i)(z^2+az+b)$.
3) Résoudre dans ℂ l'équation $P(z)=0$.

Ex 43 : ***Une équation de degré 4***

1) Résoudre dans ℂ l'équation $z^4=1$.

2) Soit z un nombre complexe . On pose $z=\frac{u-1}{u+1}$ (avec $u\neq-1$) .

Exprimer u en fonction de z .
3) En déduire les solutions dans ℂ de l'équation $(u-1)^4=(u+1)^4$.

Ex 44 : ***Identification et images des solutions sur un cercle***

Soit $f(z)=z^4-\sqrt{2}z^3-4\sqrt{2}z-16$.

1) Trouver deux réels a et b tels que $f(z)=(z^2+4)(z^2+az+b)$.

2) Résoudre dans ℂ l'équation $f(z)=0$.

3) Soit A, B , C et D les images des solutions de l'équation précédente. Montrer que ces points sont sur un même cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

Problèmes classiques

Ex 45 : ***Utiliser les formules d'Euler***

Soit $\theta\in]0;2\pi[$.

En factorisant par $e^{i\frac{\theta}{2}}$ Déterminer le module et un argument de $a=1+e^{i\theta}$ et $b=1-e^{i\theta}$.

En déduire que $\frac{a}{b}$ est un imaginaire pur.

Ex 46 : ***Utiliser la formule de Moivre et les formules d'Euler***

1) Montrer que $\cos(n\theta)=\text{Re}\left((e^{i\theta})^n\right)$ et $\sin(n\theta)=\text{Im}\left((e^{i\theta})^n\right)$

2) On pose $C_n=1+\cos(\theta)+\cos(2\theta)+\ldots+\cos((n-1\theta))$

Montrer en utilisant la question 1) et les formules d'Euler que :

$$C_n=\cos\left((n-1)\frac{\theta}{2}\right)\frac{\sin\left(n\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

Ex 47 : ***Linéarisation et formules d'Euler***

Soit $n\in\mathbb{N}$. Linéariser $\cos^n x$, c'est l'écrire en fonction de sommes de $\cos(px)$ où $p\in\mathbb{N}$.

1) Linéarisation de $\cos^5 x$.

On admet que $(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$.

a) En utilisant les formules d'Euler, montrer que :

$$\cos^5 x=\frac{1}{32}\left(e^{5ix}+5e^{3ix}+10e^{ix}+10e^{-ix}+5e^{-3ix}+e^{-5ix}\right)$$

b) En utilisant à nouveau les formules d'Euler, en déduire la linéarisation de $\cos^5 x$.

2) Linéariser $\sin^4 x$.

Ex 48 : ***Racines n-ièmes de l'unité***

Soit $n\in\mathbb{N}$. On appelle racine n-ième de l'unité tout nombre complexe z tel que $z^n=1$.

Soit z une solution de l'équation $z^n=1$.

1) Montrer que $|z|=1$. On peut alors poser $z=e^{i\theta}$.

2) Montrer qu'il existe $k\in\mathbb{Z}$, tel que $\theta=\frac{2k\pi}{n}$.

3) Vérifier que l'équation $z^n=1$ a n solutions distinctes notées u_k telles que si $u=e^{i\frac{2\pi}{n}}$, alors $u_k=u^k$, pour k entier naturel de $[0;n-1]$.

4) Soit A_k le point d'affixe u_k .

Montrer que pour tout entier naturel k de $[0;n-1]$, la longueur A_kA_{k+1} ne dépend pas de k .

Ex 49 : ***Somme et produit des racines***

1) Soit z_1 et z_2 les solutions de l'équation à coefficients réels $az^2+bz+c=0$.

Montrer que $z_1+z_2=-\frac{b}{a}$ et $z_1z_2=\frac{c}{a}$.

2) Soit z_1 et z_2 deux nombres de produit P et de somme S.

Montrer que z_1 et z_2 sont solutions de l'équation $x^2-Sx+P=0$.

3) Soit z_1 et z_2 les solutions de l'équation $2z^2-3z+3=0$.

Calculer le module de $z_1^{-1}+z_2^{-1}$

EN ROUTE VERS LE BAC

Ex 50 : ***Baccalauréat S – Pondichéry 8 avril 2014 – ex 3***

Complexes – suite géométrique – algorithme – géométrie

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Pour tout entier naturel n, on note A_n le point d'affixe z_n défini par :

$$z_0=1 \quad \text{et} \quad z_{n+1}=\left(\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\text{i}\right)z_n.$$

On définit la suite (r_n) par $r_n=|z_n|$ pour tout entier naturel n.

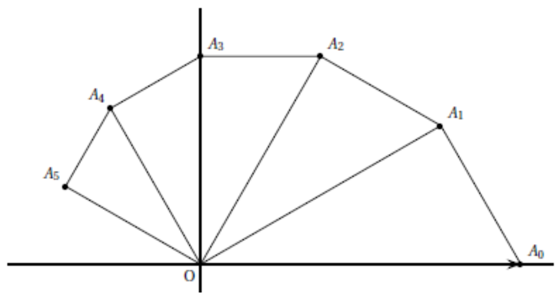
1. Donner la forme exponentielle du nombre complexe $\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\text{i}$.
2. **a.** Montrer que la suite (r_n) est géométrique de raison $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
   b. En déduire l'expression de r_n en fonction de n.
   c. Que dire de la longueur OA_n lorsque n tend vers $+\infty$?
3. On considère l'algorithme suivant :

Variables	n entier naturel R réel P réel strictement positif
Entrée	Demander la valeur de P

Traitement	R prend la valeur 1
	n prend la valeur 0
	Tant que $R>P$
	    n prend la valeur $n+1$
	    R prend la valeur $\frac{\sqrt{3}}{2}R$
	Fin tant que

Sortie	Afficher n

   a. Quelle est la valeur affichée par l'algorithme pour $P=0,5$?
   b. Pour $P=0,01$ on obtient $n=33$. Quel est le rôle de cet algorithme ?
4. **a.** Démontrer que le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_{n+1}.
   b. On admet que $z_n=r_n e^{i\frac{n\pi}{6}}$.
   Déterminer les valeurs de n pour lesquelles A_n est un point de l'axe des ordonnées.
   c. Compléter la figure donnée en annexe, à rendre avec la copie, en représentant les points A_6, A_7, A_8 et A_9.
   Les traits de construction seront apparents.



Ex 51 : *Baccalauréat S – Liban 27 mai 2014 – ex 4*

Complexes – suite géométrique – algorithme

On considère la suite de nombres complexes (z_n) définie par $z_0 = \sqrt{3} - \mathrm{i}$ et pour tout entier naturel n :

$$z_{n+1} = (1+\mathrm{i})z_n.$$

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = |z_n|$.

1. Calculer u_0.
2. Démontrer que (u_n) est la suite géométrique de raison $\sqrt{2}$ et de premier terme 2.
3. Pour tout entier naturel n, exprimer u_n en fonction de n.
4. Déterminer la limite de la suite (u_n).
5. Étant donné un réel positif p, on souhaite déterminer, à l'aide d'un algorithme, la plus petite valeur de l'entier naturel n telle que $u_n > p$.
   Recopier l'algorithme ci-dessous et le compléter par les instructions de traitement et de sortie, de façon à afficher la valeur cherchée de l'entier n.

Variables	:	u est un réel p est un réel n est un entier
Initialisation	:	Affecter à n la valeur 0 Affecter à u la valeur 2
Entrée	:	Demander la valeur de p
Traitement	:	
Sortie	:	

Partie B

1. Déterminer la forme algébrique de z_1.
2. Déterminer la forme exponentielle de z_0 et de $1+\mathrm{i}$.
   En déduire la forme exponentielle de z_1.
3. Déduire des questions précédentes la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$

Ex 52 : *Baccalauréat S – Antilles-Guyane 11 septembre 2014 – ex 4*

Complexes – équations – ensembles de points

On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On prendra comme unité 2 cm sur chaque axe.
Le graphique sera fait sur une feuille de papier millimétré et complété au fur et à mesure des questions.

On considère la fonction f qui à tout nombre complexe z associe

$$f(z) = z^2 + 2z + 9.$$

1. Calculer l'image de $-1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ par la fonction f.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 5$.
   Écrire sous forme exponentielle les solutions de cette équation.
   Construire alors sur le graphique, à la règle et au compas, les points A et B dont l'affixe est solution de l'équation (A étant le point dont l'affixe a une partie imaginaire positive).
   On laissera les traits de construction apparents.
3. Soit λ un nombre réel. On considère l'équation $f(z) = \lambda$ d'inconnue z.
   Déterminer l'ensemble des valeurs de λ pour lesquelles l'équation $f(z) = \lambda$ admet deux solutions complexes conjuguées.
4. Soit (F) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z vérifie

   $$|f(z) - 8| = 3.$$

   Prouver que (F) est le cercle de centre $\Omega(-1\,;\,0)$ et de rayon $\sqrt{3}$.
   Tracer (F) sur le graphique.
5. Soit z un nombre complexe, tel que $z = x + \mathrm{i}y$ où x et y sont des nombres réels.
   a. Montrer que la forme algébrique de $f(z)$ est

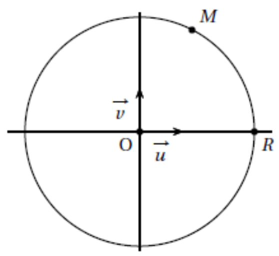
   $$x^2 - y^2 + 2x + 9 + \mathrm{i}(2xy + 2y).$$

   b. On note (E) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z est telle que $f(z)$ soit un nombre réel.
   Montrer que (E) est la réunion de deux droites D_1 et D_2 dont on précisera les équations.
   Compléter le graphique de l'annexe en traçant ces droites.
6. Déterminer les coordonnées des points d'intersection des ensembles (E) et (F).

Ex 53 : *Baccalauréat S – Antilles-Guyane 22 juin 2015 – ex 3*

Complexes – suite géométrique – géométrie

On appelle $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.
Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ on a placé un point M d'affixe z appartenant à $\mathbb{C}$, puis le point R intersection du cercle de centre O passant par M et du demi-axe $\left[\mathrm{O}\,;\,\vec{u}\right)$.



1. Exprimer l'affixe du point R en fonction de z.
2. Soit le point M' d'affixe z' définie par

   $$z' = \frac{1}{2}\left(\frac{z + |z|}{2}\right).$$

   Reproduire la figure sur la copie et construire le point M'.

Partie B

On définit la suite de nombres complexes (z_n) par un premier terme z_0 appartenant à $\mathbb{C}$ et, pour tout entier naturel n, par la relation de récurrence :

$$z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{4}.$$

Le but de cette partie est d'étudier si le comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$ dépend du choix de z_0.

1. Que peut-on dire du comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$ quand z_0 est un nombre réel négatif?
2. Que peut-on dire du comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$ quand z_0 est un nombre réel positif?
3. On suppose désormais que z_0n'est pas un nombre réel.
   a. Quelle conjecture peut-on faire sur le comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$?
   b. Démontrer cette conjecture, puis conclure.*

Ex 54 : *Baccalauréat S – Asie 16 juin 2015 – ex 4*

Complexes – le nombre j – géométrie

Le plan est muni du repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

On donne le nombre complexe $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Le but de cet exercice est d'étudier quelques propriétés du nombre j et de mettre en évidence un lien de ce nombre avec les triangles équilatéraux.

Partie A : propriétés du nombre j

1. **a.** Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation

$$z^2 + z + 1 = 0.$$

   b. Vérifier que le nombre complexe j est une solution de cette équation.
2. Déterminer le module et un argument du nombre complexe j, puis donner sa forme exponentielle.
3. Démontrer les égalités suivantes :
   a. $j^3 = 1$;
   b. $j^2 = -1 - j$.
4. On note P, Q, R les images respectives des nombres complexes 1, j et j^2 dans le plan.
   Quelle est la nature du triangle PQR ? Justifier la réponse.

Partie B

Soit a, b, c trois nombres complexes vérifiant l'égalité $a + jb + j^2c = 0$.
On note A, B, C les images respectives des nombres a, b, c dans le plan.

1. En utilisant la question A - 3. b., démontrer l'égalité : $a - c = j(c - b)$.
2. En déduire que AC = BC .
3. Démontrer l'égalité : $a - b = j^2(b - c)$.
4. En déduire que le triangle ABC est équilatéral.*

Ex 55 : *Baccalauréat S – Métropole 22 juin 2015 – ex 2*

Complexes – équation – géométrie

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation (E) d'inconnue z :

$$z^2 - 8z + 64 = 0.$$

   Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
2. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 4 + 4i\sqrt{3}$, $b = 4 - 4i\sqrt{3}$ et $c = 8i$.
   a. Calculer le module et un argument du nombre a.
   b. Donner la forme exponentielle des nombres a et b.
   c. Montrer que les points A, B et C sont sur un même cercle ce de centre O dont on déterminera le rayon.
   d. Placer les points A, B et C dans le repère $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

Pour la suite de l'exercice, on pourra s'aider de la figure de la question **2. d.** complétée au fur et à mesure de l'avancement des questions.

3. On considère les points A′, B′ et C′ d'affixes respectives $a' = ae^{i\frac{\pi}{3}}$, $b' = be^{i\frac{\pi}{3}}$ et $c' = ce^{i\frac{\pi}{3}}$.
   a. Montrer que $b' = 8$.
   b. Calculer le module et un argument du nombre a'.
   Pour la suite on admet que $a' = -4 + 4i\sqrt{3}$ et $c' = -4\sqrt{3} + 4i$.
4. On admet que si M et N sont deux points du plan d'affixes respectives m et n alors le milieu I du segment $[MN]$ a pour affixe $\frac{m+n}{2}$ et la longueur MN est égale à $|n - m|$.
   a. On note r, s et t les affixes des milieux respectifs R, S et T des segments [A′B], [B′C] et [C′A].
   Calculer r et s. On admet que $t = 2 - 2\sqrt{3} + i\left(2 + 2\sqrt{3}\right)$.
   b. Quelle conjecture peut-on faire quant à la nature du triangle RST ? Justifier ce résultat.*

Ex 56 : *Baccalauréat S – Nouvelle Calédonie mars 2016 – ex 4*

Complexes – suite géométrique – géométrie

On considère les nombres complexes z_n définis, pour tout entier naturel n, par

$$z_0 = 1 \quad \text{et} \quad z_{n+1} = \left(1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)z_n.$$

On note A_n le point d'affixe z_n dans le repère orthonormé $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ de l'annexe 2.
L'objet de cet exercice est d'étudier la construction des points A_n.

1. **a.** Vérifier que $1 + i\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}e^{i\frac{\pi}{6}}$.
   b. En déduire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.
2. **a.** Montrer que pour tout entier naturel n,

$$z_n = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n e^{in\frac{\pi}{6}}.$$

   b. Pour quelles valeurs de n, les points O, A_0 et A_n sont-ils alignés ?
3. Pour tout entier naturel n, on pose $d_n = |z_{n+1} - z_n|$.
   a. Interpréter géométriquement d_n.
   b. Calculer d_0.
   c. Montrer que pour tout entier naturel n non nul,

$$z_{n+2} - z_{n+1} = \left(1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)(z_{n+1} - z_n).$$

   d. En déduire que la suite $(d_n)_{n\geqslant 0}$ est géométrique puis que pour tout entier naturel n,

$$d_n = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n.$$

4. **a.** Montrer que pour tout entier naturel n,

$$|z_{n+1}|^2 = |z_n|^2 + d_n^2.$$

   b. En déduire que, pour tout entier naturel n, le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_n.
   c. Construire, à la règle non graduée et au compas, le point A_5 sur la figure de l'annexe 2 à rendre avec la copie.
   d. Justifier cette construction.